

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА В ПОЧВЕ

Ф. Д. Микайылов¹, Е. В. Шейн²¹Сельскохозяйственный факультет университета «Ыгдыр», кафедра почвоведения и питания растений, 76000, Суверен Кампус, Ыгдыр, Турция
e-mail: farizmikayilov@gmail.com²Факультет почвоведения МГУ имени М. В. Ломоносова, 119991, Москва, Ленинские горы
e-mail: evgeny.shein@gmail.com

Поступила в редакцию 07 ноября 2014 г., принята к печати 11 декабря 2014 г.

В работе представлены точечные и среднеинтегральные аналитические решения задачи теплопереноса в почве конечной и полубесконечной толщины при граничных условиях первого рода с бесконечной гармоникой на поверхности почвы. Разработаны методики определения коэффициента температуропроводности по точечному и среднему значению температуры почв заданной мощности на основании результатов анализа динамики температуры на одной глубине по восьми суточным наблюдениям с интервалом в три часа. Предложенные методы основаны на решении (с двумя гармониками на поверхности почвы) обратных задач уравнения теплопереноса. Данные методы позволяют оценивать температуропроводность в почве в естественных условиях, что должно увеличить адекватность и расширить границы использования математических моделей теплового режима почв.

Ключевые слова: почва, моделирование, перенос тепла, граничные условия.

ВВЕДЕНИЕ

При моделировании процессов переноса тепла в почве возникает необходимость анализа решений уравнения теплопроводности, поскольку для практических расчетов теплового режима могут быть использованы приближенные решения, имеющие более простой вид и обладающие достаточной точностью, которые должны полностью соответствовать физической картине процессов распространения тепла в почве. Для этого целесообразно проанализировать влияние наиболее часто используемых в практике упрощений на процесс переноса тепла в почве, оценить влияние краевых условий, отдельных членов и коэффициентов дифференциальных уравнений, влияние размеров области на описываемый процесс.

Цель данной работы заключается в исследовании влияния граничных условий на решение уравнения теплопереноса и разработке методики определения коэффициента температуропроводности почвы, основанной на решении обратных задач уравнения теплопереноса.

Выбор модели теплопереноса в почве. Известно, что одномерное распространение тепла в почве описывается классическим уравнением теплопроводности, которое (при

отсутствии фазовых переходов влаги в почве и переноса тепла с влагой и при предположении, что температурные градиенты связаны только с вертикальным переносом тепла) имеет следующий вид (Карслоу и Егер, 1964; Куртнер, Чудновский, 1979; Чудновский, 1976; «Теория и методы...», 2007 и др.):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (\kappa = \lambda / c_v), \quad (1)$$

где $T(x, t)$ – температура почвы в точке x в момент времени t ; κ – коэффициент температуропроводности; λ – коэффициент теплопроводности; c_v – объемная теплоемкость.

Идентификация краевых условий.

Для исследования влияния граничных условий при моделировании переноса тепла в почве необходимо поставить начальные и граничные условия. Известно, что влияние начального условия практически не сказывается на распределении температуры почвы в момент наблюдения. Если момент времени, который интересует исследователей, достаточно удален от начального, то имеет смысл пренебречь начальными условиями распределения температуры по глубине (принять начальную температуру равной по всей исследованной глубине почвы), поскольку их влияние на процесс с течением времени ослабевает. При периодической постановке

задачи (например, суточного или годового хода температуры почвы) распределение в начальном условии отсутствует (Микайылов, Шеин, 2010; Тихонов, Самарский, 1964; Чудновский, 1966). По всей видимости, наиболее удобной характеристикой, которая может фигурировать в качестве граничного условия 1-го рода, является динамика температуры деятельной поверхности почвы в виде известной функции времени: $T(0,t) = \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ – отражает изменения температуры поверхности почвы в зависимости от времени. Ее аналитическое выражение необходимо определить заранее: она может быть определена либо путем непосредственных измерений, либо расчетными методами.

Поскольку в основном суточный (или годовой) ход температуры поверхности почвы является синусоидальной функцией времени, то с целью упрощения представляется целесообразным аппроксимировать $\varphi(t)$ периодическим тригонометрическим полиномом:

$$T(0,t) = \varphi(t) = T_0 + \sum_{j=1}^m T_j \cdot \cos(j\omega t + \varepsilon_j), \quad (2)$$

где T_0 – среднесуточная (или среднегодовая) температура деятельной поверхности почвы; m – число гармоник; T_j – амплитуды колебаний температуры поверхности почвы; $\omega = 2\pi/\tau_0$ – круговая суточная (или годовая) частота; τ_0 – период (длина) волны, выраженный в сутках (или в годах); ε_j – сдвиги фаз, зависящие от начала отсчета времени.

Из уравнения (2) следует, что при увеличении числа слагаемых в (2) приближение улучшается. Чем больше гармоник, тем вероятнее получится точное (соответствующее реальности) описание $T(0,t)$, но тем сложнее вычисление.

Вместо изменения температуры поверхности почвы можно принять условие воздействия на поверхность теплозащитных укрытий с температурой T_b при среднем значении коэффициента конвективной теплоотдачи α . Тепло, поступающее к поверхности почвы от теплозащитных укрытий вследствие конвекции, распространяется в нем посредством теплопроводности. Граничное условие для задачи такого типа имеет вид:

$\lambda \partial T(0,t) / \partial x = \alpha [T(0,t) - T_b]$, где α – коэффициент конвективного теплообмена; T_b – температура воздуха; $T(0,t)$ – температура поверхности почвы.

Определенный интерес представляет задание граничных условий на нижней границе почвенного профиля. Обычно нижнее граничное условие задается с учетом того факта, что температурные колебания быстро затухают с глубиной. Поэтому в качестве нижнего граничного условия обычно принимается постоянство температуры на достаточно большой глубине. При этом возможны два варианта записи граничного условия.

В первом варианте предполагается, что температура почвы становится постоянной только при $x \rightarrow \infty$, т.е.

$$T(\infty, t) = T_0. \quad (3)$$

Во втором варианте температура почвы не изменяется, начиная с глубины $x \geq L$, т.е. или

$$\partial T(L, t) / \partial x = 0. \quad (4)$$

Решение прямой задачи теплопереноса в почве. Решение уравнения (1) при краевых условиях (2) и (3) в безразмерных переменных имеет следующий вид (Карслоу, Егер, 1964):

$$T(y, \tau) = T_0 + \sum_{j=1}^m \Phi_j(y, b_j) \cdot \cos[j\bar{\omega}\tau + \alpha_j(y, b_j)], \quad (5)$$

где $y = x/L$, $\tau = \kappa t/L^2$, $b_j = \sqrt{j\bar{\omega}/2}$,

$$\bar{\omega} = \omega L^2 / \kappa$$

и

$$\begin{aligned} \Phi_j(y, b_j) &= T_j \cdot e^{-b_j y}, \\ \alpha_j(y, b_j) &= \varepsilon_j - \psi_j(y, b_j), \\ \psi_j(y, b_j) &= b_j y. \end{aligned} \quad (6)$$

Можно показать, что решение уравнения (1) при граничных условиях (2) и (4) на нижней границе также имеет вид (5), где функции $\Phi_j(y, b_j)$ и $\psi_j(y, b_j)$, в отличие от (6), определяются через:

$$\begin{aligned} \Phi_j(b_j, y) &= T_j \cdot K_j(b_j, y), \\ \psi_j(y, b_j) &= \arctan[P_{2j}(y, b_j)/P_{1j}(y, b_j)], \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$K_j(b_j, y) = \sqrt{\frac{\text{ch}(d_j) + \cos(d_j)}{\text{ch}(2b_j) + \cos(2b_j)}}, \quad d_j = 2b_j(1-y), \quad q_j = b_j(2-y) \quad (8)$$

$$P_{1j} = \text{ch}(q_j) \cos(b_j y) + \text{ch}(b_j y) \cos(q_j), \quad P_{2j} = \text{sh}(q_j) \sin(b_j y) + \text{sh}(b_j y) \sin(q_j)$$

и $\text{ch}(z) = (e^z + e^{-z})/2$, $\text{sh}(z) = (e^z - e^{-z})/2$ – гиперболический косинус и синус соответственно.

Среднеинтегральное решение уравнения (1) при (2) и (3)–(4) имеет вид:

$$\bar{T}(\tau) = \int_0^1 T(y, \tau) dy = T_0 + \sum_{j=1}^m M_j(b_j) \cdot \cos[j\bar{\omega}\tau + \hat{\alpha}_j(b_j)], \quad (9)$$

где $M_j(b_j)$ и $\hat{\psi}_j(b_j)$ при граничных условиях (2) и (3) определяются через:

$$M_j(b_j) = T_j \cdot \sqrt{\frac{\text{ch}(b_j) - \cos(b_j)}{b_j^2 e^{b_j}}}, \quad \hat{\psi}_j(b_j) = \arctan \left\{ \frac{1 - e^{-b_j} [\sin(b_j) + \cos(b_j)]}{1 + e^{-b_j} [\sin(b_j) - \cos(b_j)]} \right\}, \quad (10)$$

а при граничных условиях (2) и (4) определяются через:

$$M_j(b_j) = \frac{T_j \cdot \sqrt{\text{sh}^2(2b_j) + \sin^2(2b_j)}}{\sqrt{2} b_j [\text{ch}(2b_j) + \cos(2b_j)]}, \quad \hat{\psi}_j(b_j) = \arctan \left[\frac{\sin(2b_j) - \text{sh}(2b_j)}{\sin(2b_j) + \text{sh}(2b_j)} \right]. \quad (11)$$

Частные случаи решений (5) и (9) с (7)–(8) и (10)–(11) представлены в работах (Микайылов, Шеин, 2010; Тихонов, Самарский, 1966).

Решение обратной задачи теплопереноса в почве. Если температура поверхности почвы в течение суток (года) может выражаться одной гармоникой, то коэффициент температуропроводности κ можно найти из величины уменьшения суточной амплитуды температуры с глубиной или по запаздыванию фазы температурной волны на разных глубинах (Карслоу, Егер, 1964; Куртнер, Чудновский, 1979; Рычѐва, 1999; Чудновский, 1966). Такое определение допускает ощутимые погрешности из-за того, что температура почвы не всегда изменяется строго

по синусоидальному закону. Введение же второй гармоники в (2) приближает ход температуры деятельной поверхности почвы к реальной картине. Используя решение (5) и (7) для $m=2$, можно вывести формулу для определения коэффициента температуропроводности κ для произвольного периода τ_0 и безразмерной глубины y . Для этого необходимо знать распределение температуры в почвенном слое $[0, L]$ для *восьми моментов времени* на расчетном интервале времени τ_0 .

$$\text{Далее, используя решение (5) для } m=2, \quad T(y, \tau) = T_0 + \Phi_1(y, b_1) \cdot \cos(\bar{\omega}\tau + \alpha_1) + \Phi_2(y, b_2) \cdot \cos(2\bar{\omega}\tau + \alpha_2), \quad (12)$$

сначала для произвольной безразмерной глубины y и времени $t_i = i \cdot \tau_0 / 8$ следует написать следующие восемь уравнений:

$$T(y, t_i) = T_0 + \Phi_1(y, b_1) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} i + \alpha_1\right) + \Phi_2(y, b_2) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} i + \alpha_2\right), \quad (i = \overline{1, 8}) \quad (13)$$

так как имеет место

$$j\bar{\omega}\tau_i = j \cdot \frac{\omega L^2}{\kappa} \cdot \frac{\kappa}{L^2} t_i = j \cdot \omega t_i = j \cdot \frac{2\pi}{\tau_0} \cdot i \cdot \frac{\tau_0}{8} = j \cdot \frac{2\pi}{8} \cdot i$$

$$\text{и } \bar{\omega}\tau_i = \frac{2\pi}{8} \cdot i = \frac{\pi}{4} \cdot i, \quad 2\bar{\omega}\tau_i = \frac{\pi}{2} \cdot i$$

После некоторых преобразований уравнений (13) имеем (см. Приложение ниже):

$$\sum_{i=1}^4 [T(y, t_i) - T(y, t_{i+4})]^2 = 8\Phi_1^2(y, b_1). \quad (14)$$

С учетом обозначений (6)–(8) для функции $\Phi_1(y, b_1)$ и $K_1(b_1, y)$ в равенстве (14) имеем следующие выражения, которые соответствуют граничным условиям (5) и (6):

$$\frac{\sum_{i=1}^4 [T(y, t_i) - T(y, t_{i+4})]^2}{8T_1^2} = e^{-2b_1 y}. \quad (15)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^4 [T(y, t_i) - T(y, t_{i+4})]^2}{8T_1^2} = \frac{\text{ch}[2b_1(1-y)] + \cos[2b_1(1-y)]}{\text{ch}(2b_1) + \cos(2b_1)} \quad (16)$$

Аналогично на основе решения (7) для $m=2$ можно вывести среднеинтегральную формулу для определения коэффициента температуропроводности κ для произвольного периода τ_0 .

Сначала решение (7) для двух гармоник, т.е. $m=2$, преобразуем, а далее аналогично выводу уравнений (12) и (13) получаем следующую формулу:

$$\sum_{i=1}^4 [\bar{T}(t_i) - \bar{T}(t_{i+4})]^2 = 8M_1^2(b_1). \quad (17)$$

Функции в правой части уравнений (14) и (17), т.е. $\Phi_1(y, b_1)$ и $M_1(b_1)$, в зависимости от граничных условий определяются соответственно из (7)–(8) и (10)–(11).

Существует несколько способов определения параметра κ по выходной кривой безразмерной температуры почв $T(y, \tau)$ или $\bar{T}(\tau)$ (Герайзаде, 1982; Карслоу, Егер, 1964; Куртнер, Чудновский, 1979; Михайлов, Шеин, 2010; Рычёва, 1999; Horton, 1982), выраженного по формулам (5) или (7) почвенного профиля. Более подробно данные методы описаны, например, в работе Михайлова и Шеина (2010) для случая, когда температура поверхности почвы выражаться одной гармоникой.

В настоящей работе предлагаются определения коэффициента температуропроводности почвы κ , основанные на решении обратных задач уравнения теплопереноса, для случая, когда температура поверхности почвы в течение суток (года) может выражаться двумя гармониками.

Для определения коэффициента температуропроводности κ с помощью формулы (15) и (16) необходимо знать: T_1 – амплитуды колебаний температуры деятельной поверхности почвы; τ_0 – период (длина) суточной (годовой) волны, выраженный в сутках или в годах; $T(y_*, t_i^*)$, $(i = \overline{1, 8})$ – значения температуры почвенного слоя $[0, L]$ на произвольной глубине $y_* = y = x_* / L$ для восьми

моментов времени: $t_i^* = i \cdot \tau_0^* / 4$ ($i = \overline{1, 8}$).

Например, если $\tau_0^* = 24$ часа, то $t^* = 3, 6, 9, \dots, 24$ час.

С использованием указанных данных сначала подсчитываются разницы: $[T(y_*, t_i^*) - T(y_*, t_{i+4}^*)]$ для всех $i = \overline{1, 8}$. Далее по формуле (15) находится значение коэффициента температуропроводности на глубине $x_* = x$ через формулы:

$$\kappa^* = \frac{\pi}{\tau_0} \cdot \frac{(2x_*)^2}{\ln^2 \frac{\sum_{i=1}^4 [T(x_*, t_i^*) - T(x_*, t_{i+4}^*)]^2}{8T_1^2}}, \quad (18)$$

так как имеет место: $y_* = \frac{x_*}{L}$,

$$b_1 = \sqrt{\frac{\omega}{2}} = \sqrt{\frac{\omega L^2}{2\kappa}}, \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau_0}, \quad b_1 = L \sqrt{\frac{\pi}{\tau_0} \cdot \frac{1}{\kappa}} \quad \text{и}$$

$$2b_1 y = 2x \sqrt{\frac{\pi}{\tau_0} \cdot \frac{1}{\kappa}}$$

Определения κ с помощью формулы (16) осуществляется методом подбора на ЭВМ значения параметра b_1^* из условия совпадения значения левой и вычисленной по исходным данным правой части, т.е.:

$$\sum_{i=1}^4 [T(y_*, t_i^*) - T(y_*, t_{i+4}^*)]^2 / 8T_1^2.$$

Из соотношения $b_1^* = \sqrt{\omega L^2 / 2\kappa}$ находим значение коэффициента температуропроводности κ на глубине $x = x_*$, который равен:

$$\kappa^* = \frac{\pi}{\tau_0} \cdot \left(\frac{L}{b_1^*} \right)^2. \quad (19)$$

С использованием среднеинтегрального решения (9) можно также находить коэффициент температуропроводности κ , экспериментальной основой которого являются данные по температуре в почвенном слое $[0, L]$, то есть $\bar{T}(t_i)$, а также T_1 .

В данном случае подбор значения параметра b_1^* осуществляется по формулам, которые соответствуют граничным условиям (5) и (6) соответственно:

$$\frac{\sum_{i=1}^4 [\bar{T}(t_i) - \bar{T}(t_{i+4})]^2}{8T_1^2} = \frac{\text{ch}(b_1) - \cos(b_1)}{b_1^2 e^{b_1}}. \quad (20)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^4 [\bar{T}(t_i) - \bar{T}(t_{i+4})]^2}{8T_1^2} = \frac{\text{sh}^2(2b_1) + \sin^2(2b_1)}{2b_1^2 [\text{ch}(2b_1) + \cos(2b_1)]^2}. \quad (21)$$

В отличие от ранее разработанных методов (Микайылов, Шеин, 2010), здесь для определения коэффициента температуропроводности κ требуется знать заранее распределение температуры $T(y_*, t_i)$ по времени в почвенном слое $[0, L]$ на произвольной безразмерной глубине $y_* = x/L$ и $\bar{T}(t_i)$ для *восьми моментов времени*, которое позволяет с более высокой точностью определить параметр κ по формуле (18)–(21).

Параметры температуры поверхности почвы. Для определения параметров поверхности почвы в (2) приняли одну и две гармоники. По результатам измерений с помощью метода наименьших квадратов были найдены параметры распределения темпера-

туры поверхности исследуемых почв. Предварительные результаты расчетов и сравнения их с экспериментальными данными показывают, что введение второй гармоники позволяет с более высокой точностью установить параметры распределения температуры на поверхности почвы. В дальнейшем планируется более подробное исследование применения данного метода для расчета температурного режима почв, определения теплофизических параметров и характеристик (коэффициента температуропроводности почв и его зависимости от влажности).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе исследования модели переноса тепла в почве с учетом динамики граничных условий на поверхности, описываемых двумя гармониками, были получены точечные и среднеинтегральные решения, а также предложены теоретические основы методов определения коэффициента температуропроводности почвы.

В дальнейшем планируется осуществить экспериментальную проверку адекватности предложенных методик и их сравнение с существующими методами.

ПРИЛОЖЕНИЕ (APPENDIX).

Используя решение (5) для $m=2$, сначала для произвольной безразмерной глубины y и времени $t_i = i \cdot \tau_0 / 8$ следует написать следующие восемь уравнений:

$$T(y, t_i) = T_0 + \Phi_1(y, b_1) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}i + \alpha_1\right) + \Phi_2(y, b_2) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}i + \alpha_2\right), \quad (i = \overline{1, 8})$$

$$i = 1: \quad T(y, t_1) = T_0 + \Phi_1(y, b_1) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 1 + \alpha_1\right) + \Phi_2(y, b_2) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 + \alpha_2\right) \\ = T_0 + \Phi_1(y, b_1) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha_1\right) - \Phi_2(y, b_2) \cdot \sin(\alpha_2)$$

$$i = 2: \quad T(y, t_2) = T_0 + \Phi_1(y, b_1) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 2 + \alpha_1\right) + \Phi_2(y, b_2) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2 + \alpha_2\right) \\ = T_0 - \Phi_1(y, b_1) \cdot \sin(\alpha_1) - \Phi_2(y, b_2) \cdot \cos(\alpha_2)$$

$$i = 3: \quad T(y, t_3) = T_0 + \Phi_1(y, b_1) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 3 + \alpha_1\right) + \Phi_2(y, b_2) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 3 + \alpha_2\right) \\ = T_0 - \Phi_1(y, b_1) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha_1\right) + \Phi_2(y, b_2) \cdot \sin(\alpha_2)$$

$$i = 4: \quad T(y, t_4) = T_0 + \Phi_1(y, b_1) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 4 + \alpha_1\right) + \Phi_2(y, b_2) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 4 + \alpha_2\right) \\ = T_0 - \Phi_1(y, b_1) \cdot \cos(\alpha_1) + \Phi_2(y, b_2) \cdot \cos(\alpha_2)$$

$$i = 5: \quad T(y, t_5) = T_0 + \Phi_1(y, b_1) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 5 + \alpha_1\right) + \Phi_2(y, b_2) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 5 + \alpha_2\right) \\ = T_0 - \Phi_1(y, b_1) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha_1\right) - \Phi_2(y, b_2) \cdot \sin(\alpha_2)$$

$$i = 6: \quad T(y, t_6) = T_0 + \Phi_1(y, b_1) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 6 + \alpha_1\right) + \Phi_2(y, b_2) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 6 + \alpha_2\right) \\ = T_0 + \Phi_1(y, b_1) \cdot \sin(\alpha_1) - \Phi_2(y, b_2) \cdot \cos(\alpha_2)$$

$$i = 7: \quad T(y, t_7) = T_0 + \Phi_1(y, b_1) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 7 + \alpha_1\right) + \Phi_2(y, b_2) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 7 + \alpha_2\right) \\ = T_0 + \Phi_1(y, b_1) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha_1\right) + \Phi_2(y, b_2) \cdot \sin(\alpha_2)$$

$$i = 8: \quad T(y, t_8) = T_0 + \Phi_1(y, b_1) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 8 + \alpha_1\right) + \Phi_2(y, b_2) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 8 + \alpha_2\right) \\ = T_0 + \Phi_1(y, b_1) \cdot \cos(\alpha_1) + \Phi_2(y, b_2) \cdot \cos(\alpha_2)$$

Вычитая $T(y, t_i) - T(y, t_{i+4})$ для $i = 1, 2, 3, 4$, получим:

1. $T_1(y, t_1) - T_5(y, t_5) = 2\Phi_1(y, b_1) \cdot \cos(\pi/4 + \alpha_1)$
2. $T_2(y, t_1) - T_6(y, t_5) = -2\Phi_1(y, b_1) \cdot \sin(\alpha_1)$
3. $T_3(y, t_1) - T_7(y, t_5) = -2\Phi_1(y, b_1) \cdot \sin(\pi/4 + \alpha_1)$
4. $T_4(y, t_1) - T_8(y, t_5) = -2\Phi_1(y, b_1) \cdot \cos(\alpha_1)$,

а также, складывая значения их квадратов, имеем:

$$\sum_{i=1}^4 [T(y, t_i) - T(y, t_{i+4})]^2 = 4[\Phi_1(y, b_1)]^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha_1\right) + 4[\Phi_1(y, b_1)]^2 \cdot \sin^2(\alpha_1) + \\ + 4[\Phi_1(y, b_1)]^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha_1\right) + 4[\Phi_1(y, b_1)]^2 \cdot \cos^2(\alpha_1) = \\ = 4[\Phi_1(y, b_1)]^2 \left\{ \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha_1\right) + \sin^2(\alpha_1) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha_1\right) + \cos^2(\alpha_1) \right\} \\ = 4[\Phi_1(y, b_1)]^2 \{1+1\} = 8[\Phi_1(y, b_1)]^2 \\ \sum_{i=1}^4 [T(y, t_i) - T(y, t_{i+4})]^2 = 8\Phi_1^2(y, b_1)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Герайзаде А. П. 1982. Термо и влагоперенос в почвенных системах. Баку: Элм. 159с.
- Карслоу Г., Егер Д. 1964. Теплопроводность твердых тел. М., Наука. 486с.
- Куртнер Д. А., Чудновский А. Ф. 1979. Агрометеорологические основы тепловой мелиорации почв. Л.: Гидрометеоздат. 231 с.
- Микайылов Ф. Д., Шеин Е. В. 2010. Теоретические основы экспериментальных методов определения теплопроводности почв. Почвоведение. 5: 597–605.
- Рычѐва Т. А. 1999. Моделирование температурного режима дерново-подзолистой почвы: определяющая роль условий на поверхности. Почвоведение. 6: 697–703.
- Тихонов А.Н., Самарский А.А. 1966. Уравнение математической физики. М.: Наука. 724 с.
- Чудновский А. Ф. 1976. Теплофизика почв. М.: Наука. 352 с.
- Теории и методы физики почв. 2007. Под ред. Е. В. Шеина и Л. О. Карпачевского. М.: Гриф и К. 616 с.
- Horton R. Jr. 1982. Determination and use of soil thermal properties near the soil surface. New Mexico State University. 151 p.