

Физическое и натурное моделирование процессов в агроэкологических системах

Методическая статья

УДК: 519.245

ВОЗМОЖНОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ МНОЖЕСТВЕННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ НА МИКРОБНО-РАСТИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Н. И. Воробьев¹, В. Н. Пищик², Н. А. Проворов¹, О. В. Свиридова¹

¹ФГБНУ ВНИИ сельскохозяйственной микробиологии
 ш. Подбельского, 3, Пушкин, Санкт-Петербург, 196608
 E-mail: vorobyov@arriam.spb.ru

²ФГБНУ Агрофизический научно-исследовательский институт
 Гражданский пр., 14, Санкт-Петербург, 195220

Поступила в редакцию 16 июня 2014 г., принята к печати 05 декабря 2014 г.

В статье рассматриваются возможности использования системы Gauss-векторов, содержащих массивы псевдослучайных чисел, для имитации множественных стохастических воздействий внешней среды на микробно-растительные системы (МРС). При формировании системы Gauss-векторов на компьютере предлагается использовать оригинальный граф-анализ коэффициентов корреляционной матрицы факторов внешней среды. Подключение системы Gauss-векторов к виртуальным математическим моделям МРС позволяет изучать в компьютерных экспериментах статистические характеристики данных биосистем.

Ключевые слова: массив псевдослучайных чисел Gauss-вектора, граф непосредственных и опосредованных стохастических связей, мультипликативное свойство коэффициентов корреляционной матрицы факторов внешней среды.

ВВЕДЕНИЕ

Микробно-растительные системы (МРС) находятся под постоянными и разнообразными воздействиями внешней среды. Интенсивность воздействий хаотически изменяется со временем (Шабанов, Орлов, 2003) и вследствие пространственной неоднородности физических и агрохимических условий: количества солнечной радиации, запасов продуктивной влаги, температурных и питательных режимов в почве (Михеева, 1997). К этому можно добавиться также межвариантное варьирование внешней среды, искусственно создаваемое в экспериментах. В данных условиях растения с целью снижения риска для выживания проявляют особую групповую фенотипическую вариативность (Воробьев и др., 2013б), что еще больше усложняет экспериментальное изучение стохастических явлений. Кроме того, стохастические явления сложным образом переплетены между собой и с разной вероятностью проецируются на состояние плодородия почв, эффективность применения удобрений, урожайность сельскохозяйствен-

ных культур и даже на поражаемость растений болезнями.

Для всестороннего изучения стохастических и сопутствующих явлений требуются проведение масштабных экспериментов и статистический анализ соотношения детерминированных и случайных связей между взаимодействующими факторами, что связано с существенными затратами времени и ресурсов. В связи с этим возрастает значение менее затратных компьютерных экспериментов со стохастическими моделями МРС (Воробьев и др., 2013а), которые позволяют без нарушения целостности биосистем косвенным образом изучать реакцию реальных объектов на внешние воздействия, варьируя межкомпонентные связи и параметры моделей. Кроме того, компьютерные эксперименты и анализ вероятностных распределений стохастических переменных, полученных методом Монте-Карло (Ермаков, 2009), открывает возможность верификации стохастических моделей МРС даже по неполным дискретным экспериментальным данным.

В компьютерных экспериментах воздействующие на МРС факторы (стохастиче-

ские переменные) представляются *Gauss*-векторами, которые содержат множество псевдослучайных чисел. Порядок расположения чисел в ячейках массива *Gauss*-вектора устанавливается в соответствие с хаотическими изменениями во времени и пространстве факторов внешней среды. В дополнение к этому числа в массивах *Gauss*-векторов располагаются так, что образуется корреляция между значениями чисел в ячейках с одинаковым порядковым номером и реализуется заданная схема стохастических связей (далее граф связей). При наличии большого числа факторов внешнего воздействия получение информации о конфигурации графа, как правило, не представляется возможным. Поэтому возникает необходимость в использовании соотношений коэффициентов корреляционной матрицы системы факторов (Воробьев и др., 2006) для построения недостающего для моделирования стохастических переменных графа связей. Целью данного исследования является разработка методики граф-анализа корреляционной матрицы факторов внешней среды и формирования *Gauss*-векторов для стохастической модели MPC.

Алгоритмы формирования *Gauss*-векторных множеств псевдослучайных чисел на компьютере

В компьютерных реализациях факторы внешней среды и соответствующие им стохастические переменные представляются *Gauss*-векторами, которые содержат массивы псевдослучайных чисел. Массивы *Gauss*-векторов заполняются псевдослучайными числами в определенном порядке и в соответствие с нормальным Гауссовым вероятностным законом (Соболев, 1973), корреляционной матрицей и графом связей факторов. Для формирования *Gauss*-векторов и записи массивов псевдослучайных чисел в компьютерную память можно воспользоваться (например, в Excel-среде) объектно-ориентированным языком программирования *Visual Basic for Applications* (Уокенбах, 2012), стандартным генератором псевдослучайных чисел – *Rnd()*-функцией (Кнут, 2007; <http://support.microsoft.com/kb/828795>) – и алгебраическим преобразованием Бокса-Мюллера (Box, Muller, 1958):

$$\varepsilon_{1k} = \cos(2 \cdot \pi \cdot \eta_{1k}) \cdot \sqrt{-2 \cdot \ln(\eta_{2k})}, \quad (1)$$

где $k = 1, 2, \dots, N$; N – число ячеек в массиве *Gauss*-вектора; ε_{1k} – псевдослучайное число, записываемое в k -ю ячейку массива *Gauss*-вектора; η_{1k}, η_{2k} – псевдослучайные числа, сгенерированные $\{1-Rnd()\}$ -функцией после k -го двойного обращения к ней и генерации из промежутка $(0 \dots 1]$ двух псевдослучайных чисел с постоянной плотностью вероятности. Для определенности греческими буквами с индексами обозначены стохастические переменные, массивы псевдослучайных чисел и *Gauss*-векторы, а латинскими буквами – постоянные коэффициенты в алгебраических выражениях.

Алгоритм (1) реализует процедуру последовательной записи псевдослучайных чисел из промежутка $(-\infty \dots +\infty)$ в массив *Gauss*-вектора в соответствие с нормальным Гауссовым законом распределения плотности вероятности и единичной дисперсией. При формировании двух связанных *Gauss*-векторов ξ_1, ξ_2 необходимо дополнительно реализовать процедуру взаимного упорядочивания псевдослучайных чисел в ячейках массивов *Gauss*-векторов так, чтобы в обоих массивах числовые значения в ячейках с одинаковым порядковым номером коррелировали между собой с заданным коэффициентом корреляции $r(\xi_1, \xi_2) = r_{12}$. Такую процедуру можно осуществить с помощью алгоритмов преобразования независимых *Gauss*-векторов:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \begin{cases} \xi_{1k} = \varepsilon_{1k} \\ \xi_{2k} = \varepsilon_{1k} \cdot r_{12} + \varepsilon_{2k} \cdot Sg(r_{12}) \cdot \sqrt{1 - r_{12}^2} \end{cases} \\ \text{б)} \quad & \begin{cases} \xi_{1k} = \varepsilon_{2k} \cdot r_{12} + \varepsilon_{1k} \cdot Sg(r_{12}) \cdot \sqrt{1 - r_{12}^2} \\ \xi_{2k} = \varepsilon_{2k} \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

где $k = 1, 2, \dots, N$; N – число ячеек в массивах *Gauss*-векторов $\xi_1, \xi_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$; $\xi_{1k}, \xi_{2k}, \varepsilon_{1k}, \varepsilon_{2k}$ – псевдослучайные числа, расположенные в k -х ячейках массивов зависимых ξ_1, ξ_2 (с коэффициентом корреляции $r(\xi_1, \xi_2) = r_{12}$) и независимых $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ (с нулевым коэффициентом корреляции $r(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$) *Gauss*-векторов; $Sg(r_{12})$ – функция, возвращающая $+1$, если коэффициент r_{12} положителен, и -1 , если он отрицателен.

Алгоритм (2а) используется в тех случаях, когда стохастическая переменная ξ_1

является ведущей по отношению к ξ_2 ($\xi_1 \Rightarrow \xi_2$), а алгоритм (2б) – когда наоборот $\xi_1 \Leftarrow \xi_2$. Примером ведущего и ведомого факторов могут быть, соответственно, плотность сложения почвы и водный режим в ней, температура и скорость ферментатив-

ных процессов и т.п. Таким образом, выбор алгоритмов (2) должен основываться на дополнительной априорной информации о ведущих и ведомых факторах.

Графы связей, используемые в алгоритмах (2), представлены на рис. 1.

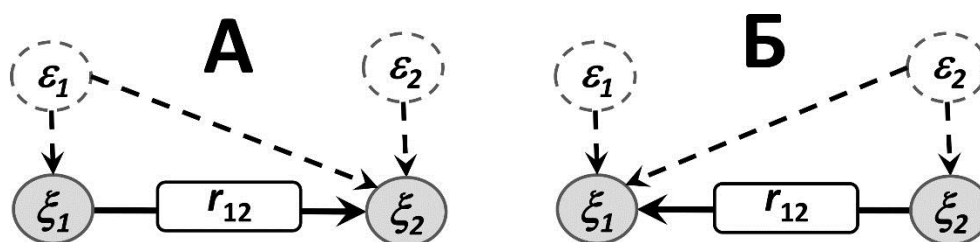


Рис. 1. Графы связей Gauss-векторов $\xi_1, \xi_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$.

А – алгоритм (2а), ξ_1 ведущая стохастическая переменная по отношению к ведомой переменной ξ_2 ($\xi_1 \Rightarrow \xi_2$). Б – алгоритм (2б), $\xi_1 \Leftarrow \xi_2$. Сплошные стрелки направлены от ведущих стохастических переменных к ведомым; пунктирные стрелки – от независимых стохастических переменных ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$) к зависимым (ξ_1, ξ_2).

Критерии качества алгоритмов формирования Gauss-векторов

Массивы псевдослучайных чисел Gauss-векторов должны удовлетворять следующим статистическим критериям.

Критерий суммы чисел: сумма чисел в массивах любого Gauss-вектора должна равняться нулю:

$$\sum_{k=1}^N \varepsilon_{jk} = 0, \quad (3)$$

где ε_j – Gauss-вектор с номером (j); $k = 1, 2, \dots, N$; N – число ячеек в массиве Gauss-вектора ε_j ; ε_{jk} – псевдослучайное число, расположенное в k -й ячейке массива Gauss-вектора ε_j .

Дисперсионный критерий: дисперсия чисел в массивах любого Gauss-вектора должна равняться единице:

$$\sigma^2(\varepsilon_j) = \sum_{k=1}^N \varepsilon_{jk}^2 = 1. \quad (4)$$

Корреляционный критерий: парный коэффициент корреляции чисел из массивов первого и второго Gauss-векторов должен равняться заданной величине $r(\xi_1, \xi_2) = r_{12}$:

$$r(\xi_1, \xi_2) = \sum_{k=1}^N (\xi_{1k} \cdot \xi_{2k}) = r_{12}, \quad (5)$$

где ξ_1, ξ_2 – первый и второй Gauss-векторы; $k = 1, 2, \dots, N$; N – число ячеек в массивах Gauss-векторов ξ_1, ξ_2 ; ξ_{1k}, ξ_{2k} – псевдослучайные числа, расположенные в k -х ячейках массивов первого и второго Gauss-векторов ξ_1, ξ_2 .

Алгоритмы (2) формируют зависимые Gauss-векторы ξ_1, ξ_2 , используя формулы преобразования чисел из массивов независимых Gauss-векторов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, для которых выполняются критерии (3), (4) и (5) при $r(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$. Вычисления с использованием формул (2а, 2б) показывают, что зависимые Gauss-векторы ξ_1, ξ_2 также удовлетворяют критериям (3), (4) и (5), но при $r(\xi_1, \xi_2) = r_{12}$.

Для алгоритма (2а): $\sum_{k=1}^N \xi_{1k} = \sum_{k=1}^N \varepsilon_{1k} = 0$;

$$\sum_{k=1}^N \xi_{2k} = \sum_{k=1}^N (r_{12} \cdot \varepsilon_{1k} + \text{Sg}(r_{12}) \cdot \sqrt{1-r_{12}^2} \cdot \varepsilon_{2k}) = 0; \quad \sigma^2(\xi_1) = \sum_{k=1}^N \varepsilon_{1k}^2 = 1,$$

$$\sigma^2(\xi_2) = \sum_{k=1}^N \xi_{2k}^2 = \sum_{k=1}^N [r_{12}^2 \cdot \varepsilon_{1k}^2 + (1-r_{12}^2) \cdot \varepsilon_{2k}^2 + 2 \cdot \text{Sg}(r_{12}) \cdot r_{12} \cdot \sqrt{1-r_{12}^2} \cdot \varepsilon_{1k} \cdot \varepsilon_{2k}] = 1;$$

$$r(\xi_1, \xi_2) = \sum_{k=1}^N (\xi_{1k} \cdot \xi_{2k}) = \sum_{k=1}^N [r_{12} \cdot \varepsilon_{1k}^2 + (1-r_{12}) \cdot \varepsilon_{1k} \cdot \varepsilon_{2k}] = r_{12}$$

Для алгоритма (2б): $\sum_{k=1}^N \xi_{1k} = \sum_{k=1}^N (r_{12} \cdot \varepsilon_{2k} + \text{Sg}(r_{12}) \cdot \sqrt{1-r_{12}^2} \cdot \varepsilon_{1k}) = 0$; $\sum_{k=1}^N \xi_{2k} = \sum_{k=1}^N \varepsilon_{2k} = 0$;

$$\sigma^2(\xi_1) = \sum_{k=1}^N \xi_{1k}^2 = \sum_{k=1}^N [r_{12}^2 \cdot \varepsilon_{2k}^2 + (1-r_{12}^2) \cdot \varepsilon_{1k}^2 + 2 \cdot \text{Sg}(r_{12}) \cdot r_{12} \cdot \sqrt{1-r_{12}^2} \cdot \varepsilon_{1k} \cdot \varepsilon_{2k}] = 1;$$

$$\sigma^2(\xi_2) = \sum_{k=1}^N \varepsilon_{2k}^2 = 1; \quad r(\xi_1, \xi_2) = \sum_{k=1}^N (\xi_{1k} \cdot \xi_{2k}) = \sum_{k=1}^N [r_{12} \cdot \varepsilon_{2k}^2 + (1-r_{12}) \cdot \varepsilon_{1k} \cdot \varepsilon_{2k}] = r_{12}.$$

Мультипликативное свойство коэффициентов корреляционной матрицы

Мультипликативное свойство коэффициентов корреляционной матрицы проявляется при заполнении псевдослучайными числами массивов трех Gauss-векторов

ξ_1, ξ_2, ξ_3 , связанных коэффициентами парной корреляции r_{12}, r_{23} между ξ_1, ξ_2 и ξ_2, ξ_3 соответственно. Для формирования трех связанных Gauss-векторов можно использовать следующие четыре алгоритма:

$$\text{а) } \begin{cases} \xi_{1k} = \varepsilon_{1k} \\ \xi_{2k} = \xi_{1k} \cdot r_{12} + \varepsilon_{2k} \cdot \text{Sg}(r_{12}) \cdot \sqrt{1-r_{12}^2} \\ \xi_{3k} = \xi_{2k} \cdot r_{23} + \varepsilon_{3k} \cdot \text{Sg}(r_{23}) \cdot \sqrt{1-r_{23}^2} \end{cases}, \text{ б) } \begin{cases} \xi_{1k} = \xi_{2k} \cdot r_{12} + \varepsilon_{1k} \cdot \text{Sg}(r_{12}) \cdot \sqrt{1-r_{12}^2} \\ \xi_{2k} = \xi_{3k} \cdot r_{23} + \varepsilon_{2k} \cdot \text{Sg}(r_{23}) \cdot \sqrt{1-r_{23}^2} \\ \xi_{3k} = \varepsilon_{3k} \end{cases}, \quad (6)$$

$$\text{в) } \begin{cases} \xi_{1k} = \xi_{2k} \cdot r_{12} + \varepsilon_{1k} \cdot \text{Sg}(r_{12}) \cdot \sqrt{1-r_{12}^2} \\ \xi_{2k} = \varepsilon_{2k} \\ \xi_{3k} = \xi_{2k} \cdot r_{23} + \varepsilon_{3k} \cdot \text{Sg}(r_{23}) \cdot \sqrt{1-r_{23}^2} \end{cases}, \text{ г) } \begin{cases} \xi_{1k} = \varepsilon_{1k} \text{ для } (r_{12}^2 + r_{23}^2) \leq 1 \\ \xi_{2k} = \xi_{1k} r_{12} + \xi_{3k} r_{23} + \varepsilon_{2k} \text{Sg}(r_{12}) \text{Sg}(r_{23}) \cdot \sqrt{1-r_{12}^2-r_{23}^2} \\ \xi_{3k} = \varepsilon_{3k} \end{cases}$$

где $k = 1, 2, \dots, N$; N – число ячеек в массивах Gauss-векторов $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$; $\xi_{1k}, \xi_{2k}, \xi_{3k}, \varepsilon_{1k}, \varepsilon_{2k}, \varepsilon_{3k}$ – псевдослучайные числа, расположенные в k -х ячейках массивов зависимых ξ_1, ξ_2, ξ_3 (с коэффициентами корреляции $r(\xi_1, \xi_2) = r_{12}$, $r(\xi_2, \xi_3) = r_{23}$) и независимых $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ (с коэффициентами корреляции $r(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = r(\varepsilon_1, \varepsilon_3) = r(\varepsilon_2, \varepsilon_3) = 0$) Gauss-векторов; $(r_{12}^2 + r_{23}^2) \leq 1$ – ограничение, накладываемое алгоритмом (6г) на значения коэффициентов корреляции r_{12}, r_{23} .

Алгоритм (6а) используется в тех случаях, когда ξ_1 является ведущей по отношению к ξ_2 , а ξ_2 , в свою очередь, является ве-

дущей по отношению к ξ_3 ($\xi_1 \Rightarrow \xi_2 \Rightarrow \xi_3$). Алгоритм (6б) – $\xi_1 \Leftarrow \xi_2 \Leftarrow \xi_3$. Алгоритм (6в) – $\xi_1 \Leftarrow \xi_2 \Rightarrow \xi_3$. Алгоритм (6г) – $\xi_1 \Rightarrow \xi_2 \Leftarrow \xi_3$. Алгоритмами (6) формируются Gauss-векторы с использованием двух коэффициентов корреляции r_{12}, r_{23} для двух непосредственных связей стохастических переменных. При этом коэффициент корреляции опосредованной связи (r_{13}) не задается и является следствием действия двух непосредственных связей, характеризующихся r_{12}, r_{23} .

Графы связей, используемые в алго-

ритмах (6), представлены на рис. 2.

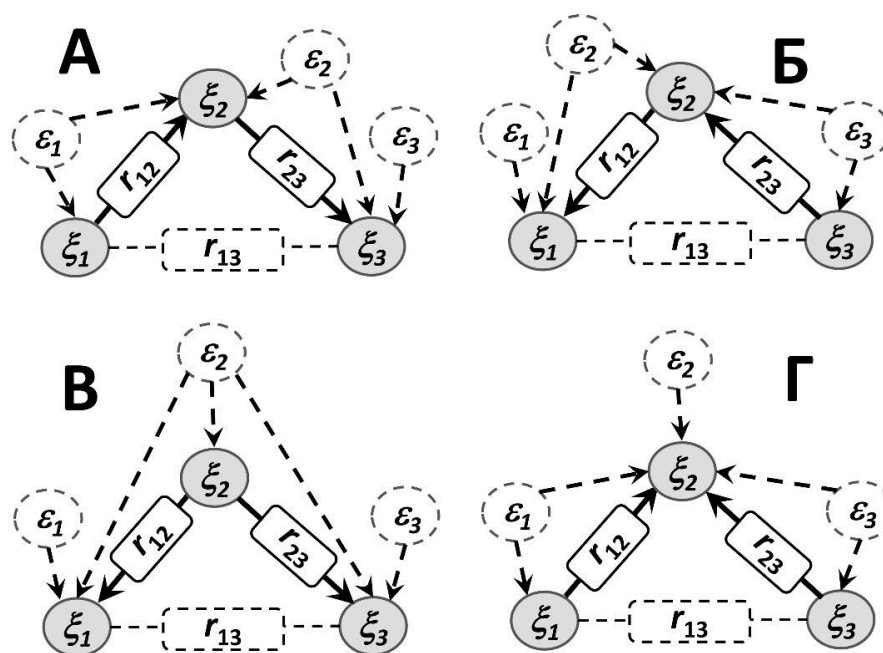


Рис. 2. Графы связей Gauss-векторов $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

А – алгоритм (6а), стохастическая переменная ξ_1 является ведущей по отношению к ξ_2 , а ξ_2 , в свою очередь, является ведущей по отношению к ξ_3 ($\xi_1 \Rightarrow \xi_2 \Rightarrow \xi_3$). Б – алгоритм (6б), $\xi_1 \Leftarrow \xi_2 \Leftarrow \xi_3$.

В – алгоритм (6в), $\xi_1 \Leftarrow \xi_2 \Rightarrow \xi_3$. Г – алгоритм (6г), $\xi_1 \Rightarrow \xi_2 \Leftarrow \xi_3$. Сплошные стрелки направляются от ведущих стохастических переменных к ведомым. Пунктирные стрелки направляются от независимых стохастических переменных ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$) к зависимым (ξ_1, ξ_2, ξ_3). r_{13} – коэффициент корреляции опосредованной связи ξ_1, ξ_3 . r_{12}, r_{23} – коэффициенты корреляции непосредственных связей ξ_1, ξ_2 и ξ_2, ξ_3 .

Алгоритмы (6) удовлетворяют критериям (3), (4) и (5) в отношении коэффициентов корреляции двух непосредственных связей Gauss-векторов ξ_1, ξ_2 и ξ_2, ξ_3 . Если применить корреляционный критерий (5) в от-

ношении опосредованной связи Gauss-векторов ξ_1, ξ_3 , то выводится мультипликативное свойство коэффициентов корреляционной матрицы:

а) $r(\xi_1, \xi_3) = r_{13} = r_{12} \cdot r_{23}$ – для алгоритмов (6а, 6б, 6в);

(7)

б) $(r_{12}^2 + r_{23}^2) \leq 1, r(\xi_1, \xi_3) = r_{13} = 0$ – для алгоритма (6г).

При разработке алгоритма формирования четырех и более Gauss-векторов можно использовать комбинацию формул алгоритмов (6). Например, в алгоритм формирова-

ния шести Gauss-векторов $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6$, связанных графом (рис. 3), включены формулы алгоритмов (6а) и (6г):

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{1k} = \varepsilon_{1k}, \quad (r_{12}^2 + r_{23}^2) \leq 1 \\ \xi_{2k} = \xi_{1k} \cdot r_{12} + \xi_{3k} \cdot r_{23} + \varepsilon_{2k} \cdot \text{Sg}(r_{12}) \cdot \text{Sg}(r_{23}) \cdot \sqrt{1 - r_{12}^2 - r_{23}^2} \\ \xi_{3k} = \varepsilon_{3k} \\ \xi_{4k} = \xi_{2k} \cdot r_{24} + \varepsilon_{4k} \cdot \text{Sign}(r_{24}) \cdot \sqrt{1 - r_{24}^2} \\ \xi_{5k} = \xi_{4k} \cdot r_{45} + \varepsilon_{5k} \cdot \text{Sign}(r_{45}) \cdot \sqrt{1 - r_{45}^2} \\ \xi_{6k} = \xi_{4k} \cdot r_{46} + \varepsilon_{6k} \cdot \text{Sign}(r_{46}) \cdot \sqrt{1 - r_{46}^2} \end{array} \right. \quad (8)$$

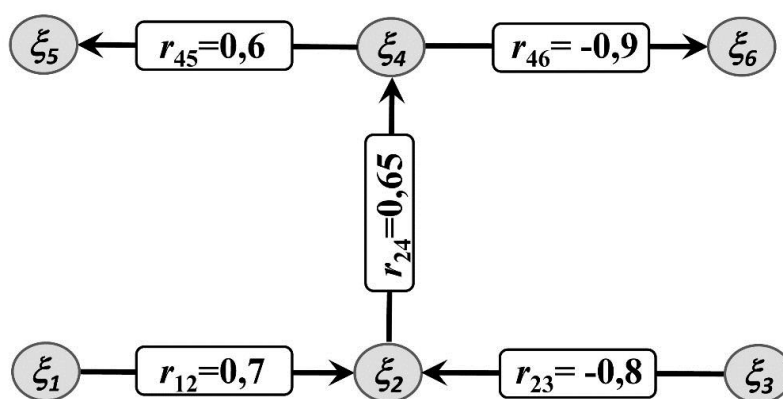


Рис. 3. Граф связей шести Gauss-векторов $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6$.
 $r_{12}, r_{23}, r_{24}, r_{45}, r_{46}$ – коэффициенты парной корреляции непосредственных связей.
 Стрелки направляются от ведущих стохастических переменных к ведомым.

С использованием алгоритма (8) на компьютере в Excel-среде были сформированы массивы шести Gauss-векторов $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6$ и заполнены псевдослучайными

числами ($N = 10^4$). Затем с помощью (5) были вычислены коэффициенты корреляционной матрицы шести Gauss-векторов (**R**):

$$R = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{0,597} & 0,008 & 0,398 & 0,244 & -0,361 \\ \mathbf{0,597} & 1 & \mathbf{-0,695} & \mathbf{0,651} & 0,393 & -0,589 \\ 0,008 & \mathbf{-0,695} & 1 & -0,448 & -0,266 & 0,406 \\ 0,398 & \mathbf{0,651} & -0,448 & 1 & \mathbf{0,602} & \mathbf{-0,900} \\ 0,244 & 0,393 & -0,266 & \mathbf{0,602} & 1 & -0,549 \\ -0,361 & -0,589 & 0,406 & \mathbf{-0,900} & -0,549 & 1 \end{vmatrix} \quad (9)$$

где **Bold**-шрифтом выделены коэффициенты, соответствующие непосредственным стохастическим связям графа (рис. 3), а *Italic*-шрифтом – коэффициенты, соответствующие опосредованным стохастическим связям.

Граф-анализ коэффициентов корреляционной матрицы и построение графа связей Gauss-векторов

Коэффициенты корреляционной матрицы содержат в себе информацию о структуре графа связей Gauss-векторов. Для расшифровки данной информации и построения графа связей необходимо воспользоваться мультипликативным свойством (7) и априорной информацией о ведущих и ведомых факторах окружающей среды.

Рассмотрим методику граф-анализа на примере корреляционной матрицы **R** (9). В дополнение к ней предполагается, что априори известно: ξ_1, ξ_3 являются только ведущими факторами; ξ_5, ξ_6 – только ведомыми факторами, а остальные два факторы ξ_2, ξ_4

могут быть как ведущими, так и ведомыми стохастическими переменными.

На первом шаге граф-анализа следует расставить коэффициенты корреляционной матрицы в порядке убывания модуля данных коэффициентов. Есть большая вероятность, что первые пять коэффициентов в получившемся ряду являются коэффициентами непосредственных связей шести стохастических переменных (число непосредственных связей на единицу меньше, чем число переменных). Данные коэффициенты выделены **Bold**-шрифтом в матрице **R** (9). Остальные десять коэффициентов корреляционной матрицы относятся к опосредованным стохастическим связям.

На втором шаге граф-анализа среди коэффициентов корреляции опосредованных связей достаточно выбрать пять коэффици-

ентов, которые удовлетворяют мультипликативному свойству (7), одному из алгоритмов (6) и графам связей (рис. 2):

$$1) r_{12}^2 + r_{23}^2 = 0.597^2 + (-0.695)^2 = 0.839 < 1,$$

$r_{13} = 0.008 \cong 0$ – стохастические переменные ξ_1, ξ_2, ξ_3 удовлетворяют (7б) и графу (рис. 2г);

$$2) r_{14} = r_{12} \cdot r_{24} = 0.597 \cdot 0.651 = 0.389 \cong 0.398$$
 – стохастические переменные ξ_1, ξ_2, ξ_4 удовлетворяют (7а) и графу (рис. 2а);

$$3) r_{34} = r_{23} r_{24} = (-0.695) 0.651 = -0.452 \cong -0.448$$
 – стохастические переменные ξ_3, ξ_2, ξ_4 удовлетворяют (7а) и графу (рис. 2а);

$$4) r_{25} = r_{24} \cdot r_{45} = 0.651 \cdot 0.602 = 0.392 \cong 0.393$$
 – стохастические переменные ξ_2, ξ_4, ξ_5 удовлетворяют (7а) и графу (рис. 2а);

$$5) r_{26} = r_{24} \cdot r_{46} = 0.651 \cdot (-0.9) = -0.586 \cong -0.589$$
 – стохастические переменные ξ_2, ξ_4, ξ_6 удовлетворяют (7а) и подграфу (рис. 2а).

Ошибки в приведенных выше равенствах являются следствием ограниченности размеров массивов Gauss-векторов при $N = 10^4$. При $N = 10^6$ ошибка коэффициентов корреляции становится меньше 0.001.

Граф-анализ завершается построением полной структуры связей стохастических переменных путем объединения в один пяти выбранных графов (рис. 2). В результате получается граф связей, аналогичный графу (рис. 3).

ВЫВОДЫ

Включение параметров математической модели микробно-растительной системы (МРС) в список анализируемых факторов в качестве ведомых стохастических переменных позволяет исследовать влияние внутренних обратных связей на стабилизацию интегральных характеристик биосистем в пространстве и во времени. Это достигается путем анализа дисперсий соответствующих характеристик, вызванных стохастическими внешними воздействиями, в присутствии/отсутствии внутренних связей. Для проведения подобных компьютерных экспериментов необходимо использовать математическую модель МРС с подключенной к ней системой связанных Gauss-векторов, имитирующей множественные стохастические воздействия внешней среды на МРС во времени или пространстве.

Препятствием для создания таких масштабных компьютерных виртуальных объектов, как правило, является отсутствие графа непосредственных связей факторов внешней среды. Для преодоления данного препятствия рекомендуется использовать предложенную в статье методику граф-анализа коэффициентов корреляционной матрицы и построение графа непосредственных связей факторов, основанное на представленном мультипликативном свойстве коэффициентов указанной матрицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Воробьев Н. И., Проворов Н. А. 2013а. Моделирование эволюции бобово-ризобияльного симбиоза в условиях экологической нестабильности. Экологическая генетика. 4(9):73-85.
- Воробьев Н. И., Проворов Н. А., Свиридова О. В., Пищик В. Н., Патыка Н. В., Думова В. А., Круглов Ю. В. 2013б. Ранг генетического дизайна и адаптационный потенциал растительно-микробных систем. Труды по ботанике, генетике и селекции. СПб.: ВИР. 174:61-67. ISSN 0202-3628.
- Воробьев Н. И., Свиридова О. В., Кутузова Р. С. 2006. Методические рекомендации по использованию граф-анализа в исследованиях систем, состоящих из биотических и абиотических компонентов. СПб.: ГНУ ВНИИСХМ. 58 с.
- Ермаков С. М. 2009. Метод Монте-Карло в вычислительной математике. СПб.: Невский Диалект. 192 с.
- Кнут Д. 2007. Искусство программирования. Т.2. Получисленные методы. Изд. Вильямс. 832 с.
- Михеева И. В. 1997. Изменение пространственной вариабельности свойств почвы при антропогенном воздействии. Почвоведение. 1:102-104.
- Модифицированный алгоритм, используемый в функции датчика случайных чисел RAND в Microsoft Office Excel 2007 и в Microsoft Office Excel 2003. <http://support.microsoft.com/kb/828795>.
- Соболь И. М. 1973. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука. 312 с.
- Уокенбах Д. 2012. Excel 2010: профессиональное программирование на VBA. Изд. Вильямс. 944 с.
- Шабанов В. В., Орлов И. С. 2003. Оценка природно-хозяйственного риска в условиях изменения климата (на примере сельскохозяйственной деятельности). Ч. 1. Теория. М.: МГУП. 110 с.
- Box G. E. P., Muller M. E. 1958. A Note on the Generation of Random Normal Deviates. The Annals of Mathematical Statistics. 2(29):610-611.